Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Exercice 5 type devoir

Exercice :

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \in IR \\ U_{n+1} = U_n^2 - 5U_n + 9 \ ; \ n \in IN \end{cases}$

1°) Montrer que la suite U est croissante.

2°) Montrer que si la suite U est convergente alors elle a pour limite 3.

3°) On suppose que $U_0 \in]2 ; 3[$.

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $2 < U_n < 3$.

b) En déduire que la suite U est convergente et préciser sa limite.

4°) On suppose que $U_0 \notin [2 ; 3]$.

a) Montrer que $U_1 > 3$.

b) Montrer que la suite U est divergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

5°) Que peut-on conclure pour la limite de la suite U dans le cas où $U_0 = 2$.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 5U_n + 9 - U_n$

$= U_n^2 - 6U_n + 9$

$= U_n^2 - 2 \times 3 \times U_n + 3^2$

$= (U_n - 3)^2 \geq 0$

Donc (U_n) est croissante

2°) On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n^2 - 5U_n + 9 = l$

$\Rightarrow l^2 - 5l + 9 = l$

$\Rightarrow l^2 - 6l + 9 = 0$

$\Rightarrow (l-3)^2 = 0$

$\Rightarrow l = 3$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$

3) a)

- Ona $u_0 \in]2,3[\Rightarrow 2 < u_0 < 3$ (Vraie)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]2,3[$

et montrons que $2 < u_{n+1} < 3$

- $u_{n+1} - 3 = u_n^2 - 5u_n + 9 - 3$

$= u_n^2 - 5u_n + 6$

Soit $P(x) = x^2 - 5x + 6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$

$\Rightarrow x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a $u_n \in]2,3[\Rightarrow P(u_n) < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - 3 < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < 3$ (1)

- On a $u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 5u_n + 7$

Soit $Q(x) = x^2 - 5x + 7$

$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3 < 0$

$\Rightarrow Q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Q(u_n) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_{n+1} - 2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 2$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \quad 2 < u_{n+1} < 3$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 2 < u_n < 3$

b) u est croissante et majorée par 3

donc elle est convergente.

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in]2,3[$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 - 5u_n + 9 = l$

$\Rightarrow l^2 - 5l + 9 = l$

$\Rightarrow (l-3)^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{l = 3}$

4°) $u_0 \notin [2,3]$ $\quad P(x) = x^2 - 5x + 6$

a) $u_1 - 3 = u_0^2 - 5u_0 + 6 = P(u_0)$

or $u_0 \in]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$

Donc $P(u_0) > 0 \Rightarrow u_1 - 3 > 0$

Ainsi $\boxed{u_1 > 3}$

b) Or (u_n) est croissante.

Supposons que (u_n) est majorée alors elle converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

(u_n) est croissante $\Rightarrow \forall n \geq 1 ; u_n \geqslant u_1$

$\Rightarrow \alpha \geqslant u_1 > 3$

$\Rightarrow \alpha > 3$

$\Rightarrow \alpha \neq 3$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 - 5u_n + 9 = \alpha$

$\Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 9 = \alpha$

$\Rightarrow \alpha = 3$ absurde

Donc u n'est pas majorée, or u est croissante donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5°) $u_0 = 2$

- $u_1 = u_0^2 - 5u_0 + 9 = 3$
- $u_2 = u_1^2 - 5u_1 + 9 = 3$

Montrer que $u_n = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- Pour $n = 1$; $u_1 = 3$ (Vraie)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 3$ et montrons que $u_{n+1} = 3$.
- $u_{n+1} = u_n^2 - 5u_n + 9 = 3$

Conclusion : $u_n = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$